1.7.4 Těžiště, rovnovážná poloha

Předpoklady: 010703

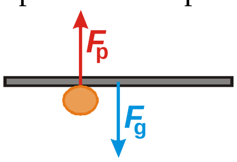
Př. 1: Polož si sešit na jeden prst tak, aby nespadl. Záleží na místě, pod kterým sešit podložíš? Proč?

Musíme sešit podložit prstem přesně uprostřed, jinak spadne.

Sešit má být v klidu:

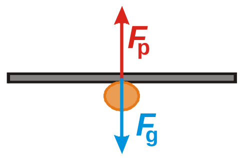
- výslednice působících sil musí být nulová (to není problém, tlaková síla prstu to dokáže zajistit automaticky),
- výsledný moment sil působících na sešit musí být nulový.

Splnit druhou podmínku je těžší.



Na sešit působí pouze dvě síly. Ve všech příkladech z minulých hodin, působily na páku tři síly (dvě byla zadané a třetí jsme hledali).

Jedinou možností, kterou nám zbývá je působit silou $\boldsymbol{F}_p$ ve stejném místě, ve kterém působí síla $\boldsymbol{F}_g$.

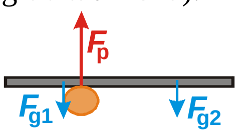


Tím, že najdeme místo, kde sešit drží položený na prstu, jsme našli i místo, které je působiště gravitační síly (tíhy).

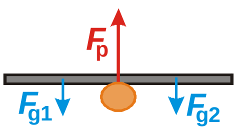
Těžiště tuhého tělesa je působiště gravitační (tíhové) síly působící na těleso.

Gravitační síla Země působí na každý malý kousek tělesa zvlášťě, ale protože sešit je (skoro) pevné těleso, tyto síly se sčítají a vytvářejí jednu společnou sílu, jejíž velikost se rovná součtu velikostí jednotlivých gravitačních sil a musí mít i nějaké působiště (těžiště).

Představíme si tyčku složenou ze dvou polovin (na oba kousky působí v jejich středu gravitační síla).



Na první pohled vidíme, že tyto tři síly v rovnováze nejsou.



Tyto tři síly už se v rovnováze nacházejí.

Př. 2: Urči polohu těžiště: a) homogenní rovné tyče o konstantním průřezu,
b) homogenní koule, c) homogenní krychle.

a) homogenní rovné tyče o konstantním průřezu
Těžiště leží na ose tyče přesně uprostřed.

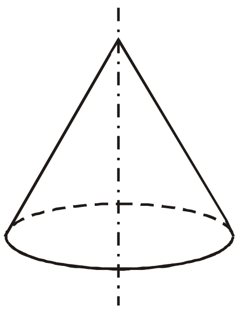
b) homogenní koule
Těžiště leží ve středu koule.

c) krychle
Těžiště leží ve středu krychle.

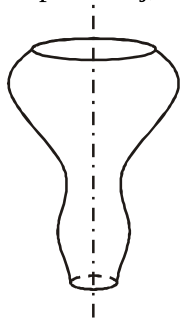
Př. 3: Leží těžiště těles pravidelného tvaru vždy v jejich středu? Pokud ne, najdi takové těleso.

Důležité je slovo homogenní (ve všech místech stejná). Pokud je například těleso složeno ze dvou částí, které mají různou hustotu, je těžiště ze středu posunuto směrem k části s větší hustotou.

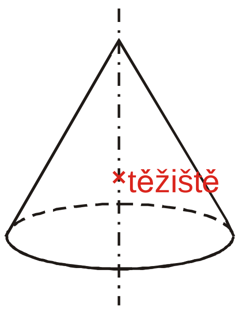
Př. 4: Odhadni polohu těžiště nakreslených těles. Předpokládej, že jsou homogenní.



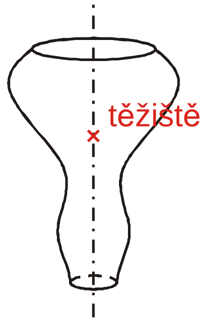
a)



b)



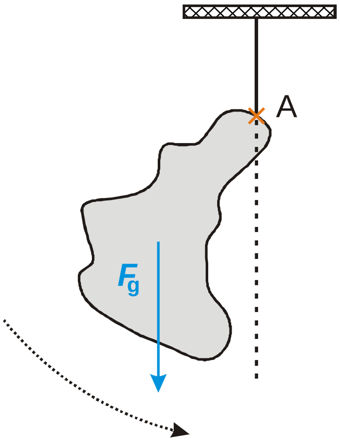
a)



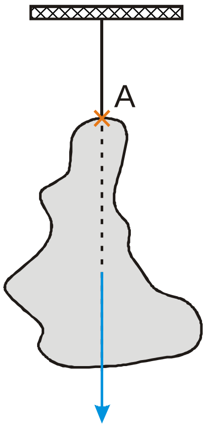
b)

Př. 5: Najdi postup, jak experimentálně zjistit polohu těžiště u nepravidelného tělesa. Správnost postupu zdůvodni.

Zavěsíme těleso v libovolném bodě, ono se zhoupne tak, aby těžiště bylo pod místem zavěšení (v takovém případě leží bod zavěšení na vektorové přímce gravitační síly $\Rightarrow$ moment gravitační síly je nulový a gravitační síla předmětem neotáčí).

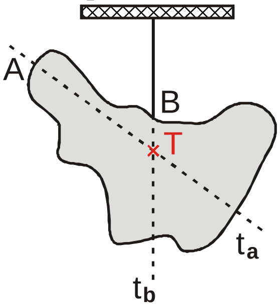


Moment gravitační síly je nenulový ⇒ těleso se otočí.



Moment gravitační síly je nulový ⇒ těleso zůstává v klidu.

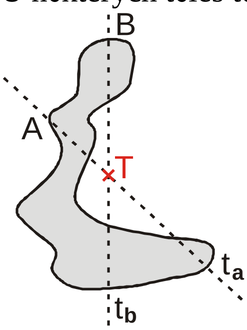
Svislá přímka z bodu *A* se nazývá těžnice.



Těžiště pak získáme jako průsečík dvou těžnic.

U papírového obrazce můžeme těžnice nakreslit a těžiště najít jako jejich průsečík. Zavěšením obrazce v jakémkoliv dalším bodě získáme těžnici, která opět prochází dříve nalezeným těžištěm.

U některých těles těžiště leží mimo vlastní těleso.

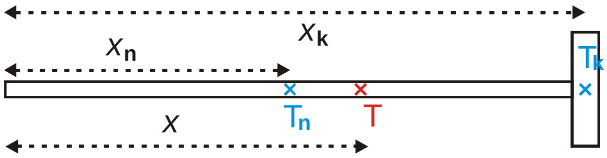


Jak početně?

Př. 6: Koště se skládá z násady (hmotnost 0,45 kg, délka 132 cm a průměr 2,2 cm) a vlastního koštěte (hmotnosti 0,35 kg, tvar přibližně kvádru o rozměrech 31 x 5,5 x 7 cm). Koště je nasazeno na násadu tak, aby jeho svislá osa splývala s osou násady. Najdi polohu těžiště. Předpokládej, že koště i násada jsou přibližně homogenní.

Těžiště leží na společné ose násady a koštěte ⇒ určujeme pouze jeho polohu ve svislém směru (pokud koště stojí).
Násada je homogenní válec ⇒ těžiště se nachází v geometrickém středu ⇒ 76 cm od kraje.

Koště je přibližně homogenní kvádr $\Rightarrow$ těžiště se nachází v geometrickém středu $\Rightarrow$ ve výšce 3,5 cm.



Koště můžeme pozorovat dvěma způsoby:

- působí na něj dvě gravitační síly F_{gn} a F_{gk},
- působí na něj jediná gravitační síla F_g.

V obou případech musí být jejich moment vůči zvolené ose stejný.
Osu zvolíme na kraji násady:

- násada: $M_n = F_{gn}x_n = m_n g x_n$, $x_n = 66\,\text{cm}$,
- vlastní koště $M_k = F_{gk}x_k = m_k g x_k$, $x_n = 132 + 3{,}5\,\text{cm} = 135{,}5\,\text{cm}$,
- celé koště: $M = F_g x = mgx$.

Dosadíme: $M_n + M_k = M$.

$$m_n g x_n + m_k g x_k = mgx$$

$$m_n x_n + m_k x_k = mx$$

$$x = \frac{m_n x_n + m_k x_k}{m} = \frac{m_n x_n + m_k x_k}{m_n + m_k} = \frac{0{,}45 \cdot 66 + 0{,}35 \cdot 135{,}5}{0{,}45 + 0{,}35}\,\text{cm} = 96\,\text{cm}$$

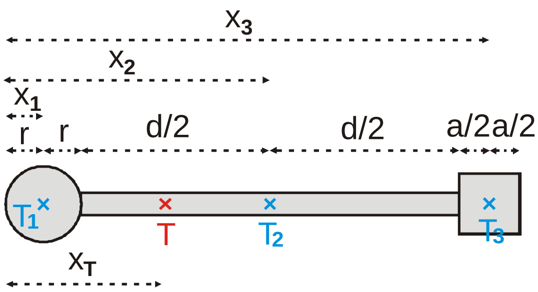
Těžiště koštěte se nachází 96 cm od horního konce násady.

Vzorec z předchozího příkladu můžeme přeindexovat pro libovolné předměty ze dvou částí.

Získáme tak **vzorec pro výpočet souřadnice těžiště**: $x_T = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$.

Vzorec je možné snadno rozšířit i na tělesa z většího počtu částí $x_T = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.

Př. 7: Rotor krušlátoru je složen z válcové osy o hmotnosti 2 kg a délce $d = 30\,\text{cm}$ a dvou koncovek. První koncovka má tvar koule o poloměru $r = 5\,\text{cm}$ a hmotnosti 5 kg, druhá koncovka má tvar krychle o straně $a = 8\,\text{cm}$ a hmotnosti 3 kg. Obě koncovky jsou nasazeny na ose tak, že jejich osa souměrnosti splývá s osou válce. Urči těžiště rotoru.



Polohu těžiště určujeme například vzhledem k okraji krušlátoru, na který je nasazena koule:

- koule: $m_1 = 5\,\text{kg}$, $x_1 = r = 5\,\text{cm}$,
- válcová osa: $m_2 = 2\,\text{kg}$, $x_2 = 2 \cdot r + \dfrac{d}{2} = 2 \cdot 5 + \dfrac{30}{2}\,\text{cm} = 25\,\text{cm}$,

- krychle: $m_2 = 3\,\text{kg}$, $x_3 = 2\cdot r + d + \frac{a}{2} = 2\cdot 5 + 30 + \frac{8}{4}\,\text{cm} = 44\,\text{cm}$.

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{5\cdot 5 + 2\cdot 25 + 3\cdot 44}{5+2+3}\,\text{cm} = 20{,}7\,\text{cm}$$

Těžiště rotoru se nachází na jeho ose ve vzdálenosti 20,7 cm od kraje osazeného koulí.

Př. 8: Rozhodni, kde se nachází těžiště dětské hračky.

Hračku není možné převrátit $\Rightarrow$ její těžiště se nachází velmi nízko. Jak se můžeme přesvědčit po rozebrání.[TB1]

Př. 9: V zadání příkladu 6 se uvádí hmotnost násady a hmotnost koštěte. Navrhni způsob, jak tyto hmotnosti zjistit bez rozebrání koštěte. Předpokládej, že máš k dispozici váhy a metr. Čím bude snížena přesnost určení obou hmotností?

Využijeme výsledek příkladu 6. Změříme rozměry násady i koštěte, změříme hmotnost celého koštěte a experimentálně (podkládáním) určíme polohu těžiště koštěte. Z těchto veličin můžeme dopočítat hmotnosti obou částí.

Známe $m = 0{,}8\,\text{kg}$, vzdálenost těžiště od okraje násady $x_T = 98\,\text{cm}$,

násada: $l = 132\,\text{cm} \Rightarrow x_1 = 66\,\text{cm}$,

koště: $7\,\text{cm} \Rightarrow x_2 = 132 + 3{,}5\,\text{cm} = 135{,}5\,\text{cm}$.

Rovnice: $x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$, $m_1 + m_2 = m$.

$x_T\left(m_1 + m_2\right) = m_1x_1 + m_2x_2$, $m_2 = m - m_1$

$x_Tm_1 + x_Tm_2 = m_1x_1 + m_2x_2$

$x_Tm_1 + x_T\left(m - m_1\right) = m_1x_1 + \left(m - m_1\right)x_2$

$x_Tm_1 + x_Tm - x_Tm_1 = m_1x_1 + mx_2 - m_1x_2$

$x_Tm - mx_2 = m_1\left(x_1 - x_2\right)$

$$m_1 = m\frac{x_T - x_2}{x_1 - x_2} = m\frac{x_2 - x_T}{x_2 - x_1} = 0{,}8\cdot\frac{135{,}5 - 98}{135{,}5 - 66}\,\text{kg} = 0{,}43\,\text{kg}$$

Vzorec pro m_2 (záměnou indexů): $m_2 = m\frac{x_T - x_1}{x_2 - x_1} = 0{,}8\cdot\frac{98 - 66}{135{,}5 - 66}\,\text{kg} = 0{,}37\,\text{kg}$.

Přesnost určení hmotností snižují:

- nepřesnosti měření všech použitých hodnot,
- skutečnost, že koště není homogenní kvádr a nevíme přesně, kde se nachází jeho těžiště,
- násada se zastrkává do koštěte (předpokládali jsme, že končí tam, kde koště začíná).

Dodatek: Tímto způsobem byly zjišťovány hmotnosti pro zadání příkladu 6.

Shrnutí: Těžiště tělesa (působiště gravitační síly) určujeme pomocí rovnosti momentů.